

# 波浪と海洋混合層の力学：層厚重み付け平均による定式化

○相木秀則（海洋研究開発機構）Richard Greatbatch (IFM-GEOMAR)

キーワード：Lagrange 平均、Euler 平均、摩擦応力、圧力応力

## はじめに

気候海洋モデルにおいてサブグリッドスケールの渦の効果を表すには2つの方法がある。①Euler 平均流速をモデルの予報変数として、渦による移流の効果をパラメータ化してトレーサーの移流項に足し込む方法と、②Lagrange 平均流速をモデルの予報変数として、渦による圧力残差の効果をパラメータ化して運動量方程式に組み込む方法である。

同様に、沿岸海洋モデルにおいてサブグリッドスケールの海面波の効果を表すにも2つの方法がある。①Euler 平均流速をモデルの予報変数として、海面波によるレイノルズ応力の効果 (Hasselmann 応力項または Stokes-Coriolis 項と呼ばれる) をパラメータ化して運動量方程式に組み込む方法と②Lagrange 平均流速をモデルの予報変数とする方法である (Mellor, 2008)。

気候海洋モデルと沿岸海洋モデルのいずれにおいても①の方法が主流となっている。②の方法は一般的に密度座標系や  $\sigma$  座標系における層厚重み付け平均によって導かれるが、エネルギー収支や粘性項の理解が遅れているためにいくつかの実験的な例を除いて実用化していない。しかし海面直下の摩擦境界層の効果を正しく表現するためには、海面に沿う  $\sigma$  座標系が適している。本研究では密度座標系における渦と平均流の相互作用の知見を海面波に応用して、Mellor の理論を補足・発展させる。

## VLHE 座標系

Jacobson & Aiki (2006) に従って  $(x^c, y^c, z^c, t^c)$  が Cartesian 座標系、 $(x, y, z, t)$  が Vertically Lagrangian Horizontally Eulerian (VLHE) 座標系を表すとす。

座標変換を次のように定義すると

$$(x^c, y^c, z^c, t^c) = (x, y, z, t) + (0, 0, z', 0) \quad (1)$$

VLHE 座標系における微分は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z'_x & 0 \\ 0 & 1 & z'_y & 0 \\ 0 & 0 & z'_z & 0 \\ 0 & 0 & z'_t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x^c} \\ \partial_{y^c} \\ \partial_{z^c} \\ \partial_{t^c} \end{pmatrix} \quad (2)$$

これを使って非圧縮の式を VLHE 座標系で表すと層厚の保存式は

$$\begin{aligned} & \left( z'_z \right)_t + \left( z'_z u \right)_x + \left( z'_z v \right)_y + \left( z'_z w^* \right)_z = 0 \\ & z'_z w^* \equiv w - z'_t - u z'_x - v z'_y \end{aligned} \quad (3ab)$$

となる。層厚重み付け平均した流速は非圧縮の条件を満たす。

$$\left( \overline{z'_z u} \right)_x + \left( \overline{z'_z v} \right)_y + \left( \overline{z'_z w^*} \right)_z = 0 \quad (4)$$

さらに層厚重み付け平均した流速は Euler 平均流速と Stokes 流速の和で表すことができる。

$$\begin{aligned} \overline{z'_z u} &= \overline{(z + z')_z (\bar{u} + u')} = \bar{u} + \overline{z'_z u'} = u^E + \left( \overline{z'_z u'} \right)_z \\ \overline{z'_z w^*} &= \overline{w - z'_t - u z'_x} = \bar{w} - \overline{u' z'_x} = w^E - \left( \overline{z'_z u'} \right)_x \end{aligned} \quad (5ab)$$

ここで

$$\left[ u^E, w^E \right] \equiv \left[ \bar{u} - \overline{z'_z u'}, \bar{w} - \overline{z'_z w^*} \right] \quad (6)$$

が Euler 平均流速で

$$\left[ \left( \overline{z'_z u'} \right)_z, - \left( \overline{z'_z u'} \right)_x \right] \quad (7)$$

が Stokes 流速である。つまり層厚重み付け平均した流速は Lagrangian 平均流速と同等の役割を果たす。

## GLM theory との比較

Andrews & McIntyre (1978) の Generalized Lagrangian Mean (GLM) theory では3次元的な Lagrangian 座標系をもちいて流体粒子の位置ベクトルを次のように分離している。

$$\Xi = \mathbf{x} + \xi \quad (8)$$

つまり  $\Xi$  が  $(x^c, y^c, z^c)$  に対応して、流体粒子の瞬間的な位置

を Euler 座標系で表す。  $\mathbf{x}$  が  $(x, y, z)$  に対応して、流体粒子の位置の位相平均を表し、これは Lagrange 座標系における位置の定義

そのものである。  $\xi$  が  $(0, 0, z')$  に対応して、波に伴う流体粒子

の位置の振動を表す。 GLM theory では流体粒子の速度を

$$\overline{D}^L \Xi \equiv \mathbf{u}^\xi \quad (9)$$

のように表記するが、これは VLHE 座標系の

$$z'_t + u z'_x + v z'_y + w^* z'_z \equiv w \quad (10)$$

に相当する。(10)式は(3b)式を変形したものである。

つぎに GLM と VLHE それぞれによるコントロールセルの動きを比較する。図1では波が右向きに進行するのにもなって Stokes 輸送が生じるため一つ一つの流体粒子は右向きにずれていく。しかし、座標系のコントロールセルは運動の高周波成分だけをとらえるように定義されているので、漂流していない。図1aの GLM

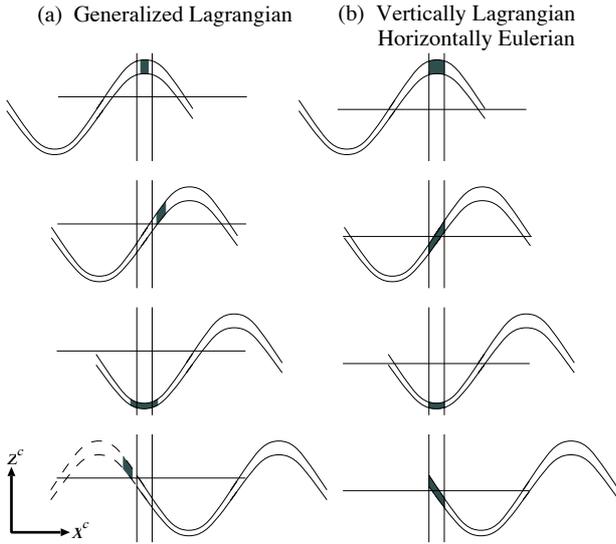


図1: 右方向に進行する海面波の時系列. (a) Generalized Lagrangian Mean theory (Andrews & McIntyre, 1978) と (b) 本研究におけるコントロールセルの動き

セルは時計回りに回転するので流体粒子の動きと似ている。ところが水面に漂う流体粒子については、セルの高さの位相平均(横線)が平均水面より高くなるという癖がある。図1bの VLHE セルは上下に運動するだけであるが、コントロールセルの厚みが変わる事で水平収束・発散の効果を表すことができる。水面に漂う流体粒子については、セルの高さの位相平均(横線)が平均水面と一致するという利点がある。

### エネルギー収支

Iwasaki (2001)や Aiki & Richards (2008)と同じように層厚み付け平均した運動エネルギーを次のように分離する。

$$\begin{aligned} \overline{z_c^c(u^2 + w^2)} &= \hat{u}^2 + \hat{w}^2 + \overline{z_c^c(u''^2 + w''^2)} \\ \hat{A} &\equiv \overline{z_c^c A}, \quad A'' \equiv A - \hat{A} \end{aligned} \quad (11)$$

平均運動エネルギーは層厚み付け平均した流速(これは Lagrange 平均流速と同等である)で定義されているので Stokes 流速の強さは平均運動エネルギーの中に含まれる。エネルギー収支は図2のように表され、運動量方程式のレイノルズ応力  $RS$  と圧力応力  $FS$  の項が平均流と波のエネルギー変換を行う。ここでは海面混合層の中の運動を考察しているので圧力応力  $FS$  は非静力学圧力によるものである。

波浪の分野でよく使われる radiation stress とはレイノルズ応力と圧力応力を足して鉛直積分したものである。またラングミュア循環の理解・数値シミュレーション等に用いられる vortex force (Craik & Leibovich, 1976)は、圧力応力  $FS$  から導くこともできると予想されているが、従来の研究では鉛直積分した系でしかその証明はなされていない。

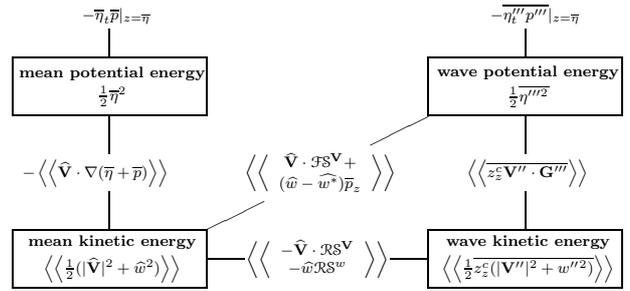


図2: 層厚み付け平均を用いて導いた海面混合層内の平均流と波浪のエネルギー収支

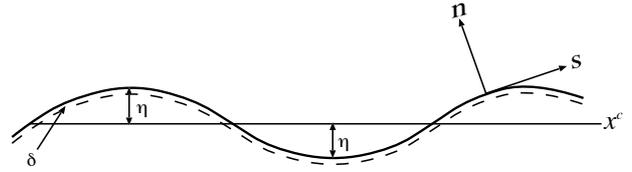


図3: 海面(実線)と摩擦境界層(破線)の模式図

### 海面摩擦境界層

非粘性の線形波の解析解は鉛直断面で渦なし( $u_z - w_x = 0$ )であるので、数 mm から数 cm の海面境界層の近傍では若干の修正が必要である。Longuet-Higgins (1953) は海面で渦あり( $u_z + w_x = 0$ )の線形解を考察し、いくつかの興味深い構造を発見した。この解を再考察するにあたり従来の研究では Pierson (1962) の3次元 Lagrange 座標系を用いるのが一般的であったが、式が複雑になり詳細な理解は得られなかった。本研究では、より簡単な VLHE 座標系を用いて Longuet-Higgins (1953) の解を再考察できることを示し、圧力応力と摩擦応力の役割を厳密に比較した。また Mellor の方法で Lagrange 平均流速を予報変数として沿岸海洋モデルを動かす場合には、モデルの粘性項を修正する必要があることが分かった。

### 参考文献

- Aiki, H., and K. J. Richards, *J. Phys. Oceanogr.*, 38, 1845–1869, 2008.
- Andrews, D. G., and M. E. McIntyre, *J. Fluid Mech.*, 89, 609–646, 1978.
- Craik, A. D. D., and S. Leibovich, *J. Fluid Mech.*, 73, 401–426, 1976.
- Iwasaki, T., *J. Atmos. Sci.*, 58, 3036–3052, 2001.
- Jacobson, T., and H. Aiki, *J. Phys. Oceanogr.*, 36, 558–564, 2006.
- Longuet-Higgins, M. L., *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A245, 535–581, 1953.
- Mellor, G., *J. Phys. Oceanogr.*, 38, 2587–2596, 2008.
- Pierson, W. J., *J. Geophys. Res.*, 67, 3151–3160, 1962.